M8 Funktionen — 1

Eine Zuordnung $x \longmapsto y$, die jedem $x -$ Wert **genau** einen $y -$ Wert zuordnet, heißt **Funktion.**
Damit ist eine Funktion eine **eindeutige Zuordnung**.

Graphisch bedeutet dies, dass jede mögliche Parallele zur $y -$ Achse den Graphen höchstens in einem Punkt schneidet.

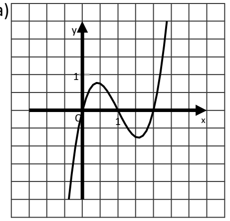
<u>Bezeichnungen</u>:

Funktionsvorschrift: $f: x \longmapsto f(x)$ z.B. $f: x \longmapsto 2x - 3$
Funktionsterm: $f(x)$ z.B. $2x - 3$
Funktionsgleichung: $y = f(x)$ z.B. $y = 2x - 3$

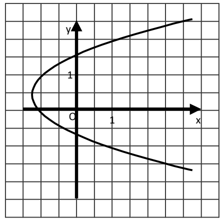
M8 Funktionen — 1

1. Aufgabe:
Gehören die abgebildeten Graphen zu einer Funktion? Begründe deine Antwort!

a)



b)



Lösung:
a) Der Graph gehört zu einer Funktion, da jede Parallele zur $y -$ Achse den Graphen genau einmal schneidet.

b) Der Graph gehört nicht zu einer Funktion, da z.B. eine Parallele zur $y -$ Achse durch den Punkt $P(1/0)$ den Graphen zweimal schneidet.

2. Aufgabe:
Sind die folgenden Zuordnungen Funktionen?
a) Uhrzeit ⟼ Temperatur b) Note bei einer Stegreifaufgabe ⟼ Schüler oder Schülerin

Lösung:
Die Zuordnung a) ist eine Funktion, da es zu jeder Uhrzeit nur genau eine Temperatur an einem Ort geben kann.
Die Zuordnung b) ist keine Funktion, da bei jeder Stegreifaufgabe normalerweise mehrere Schüler die selbe Noten haben können und deshalb eine Note nicht eindeutig einem Schüler zugeordnet werden kann.

M8 Funktionen — 2

Die **Definitionsmenge D** einer Funktion enthält alle Zahlen, die in den Funktionsterm eingesetzt werden können. D_{max} ist die größtmögliche Definitionsmenge, die eine Funktion annehmen kann.

Die Menge aller Funktionswerte y einer Funktion heißt **Wertemenge W.**

Der zu einer Funktion f gehörende Funktionsgraph wird mit G_f bezeichnet.

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:
Die $x -$ Koordinate eines Schnittpunktes eines Funktionsgraphen mit der $x -$ Achse nennt man **Nullstelle.**
Jede Nullstelle einer Funktion f ist eine Lösung der Gleichung $f(x) = 0$.
Die $y -$ Koordinate des Schnittpunktes eines Funktionsgraphen mit der $y -$Achse berechnet man, in dem man $y = f(0)$ berechnet.

M8 Funktionen — 2

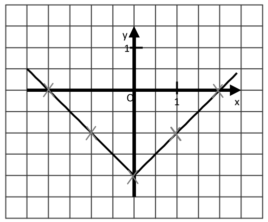
1. Aufgabe:
Gegeben ist die Funktion $f: x \longmapsto |x| - 2$ mit $D_f = D_{max}$
a) Gib D_{max} an!
b) Erstelle eine geeignete Wertetabelle und zeichne den Graphen in ein Koordinatensystem!
c) Lies die Wertemenge W ab!

2. Aufgabe:
Bestimme jeweils die Nullstelle(n) und den Schnittpunkt mit der $y -$ Achse!
a) $f(x) = 18 - 6x$ b) $g(x) = x(x - 2)$

<u>**Lösung:**</u>
1. Aufgabe:
a) $D_{max} = \mathbb{Q}$ (Menge der rationalen Zahlen)
b)

x	-2	-1	0	1	2
$y = f(x)$	0	-1	-2	-1	0

c) Die Wertemenge besteht aus allen Zahlen y, für die gilt: $y \geq -2$



2. Aufgabe:
a) Nullstelle: $18 - 6x = 0$ => $18 = 6x$ => $x = 3$;
Schnittpunkt mit $y -$Achse: $f(0) = 18 - 6 \cdot 0 = 18$
b) Nullstellen: $x = 0$ oder $x - 2 = 0$, d.h. $x = 2$

M8 Funktionen | 3

Lage eines Punktes bezüglich eines Funktionsgraphen

Der Punkt $P(a/b)$ liegt

- oberhalb von G_f, wenn $b > f(a)$
- auf G_f, wenn $b = f(a)$
- unterhalb von G_f, wenn $b < f(a)$

M8 Funktionen | 3

Aufgabe:
Betrachtet wird die Funktion $g: x \mapsto (x-3)(4-x)$ mit $D_g = \mathbb{Q}$.

a) Bestimme die Nullstellen von g!
b) Untersuche die Lage von $P(2/3)$ bezüglich G_g!
c) Gegeben ist der Punkt $Q(-1/y)$. Ermittle alle möglichen Werte von y, so dass Q unterhalb von G_g liegt!

Lösung:

a) Der Funktionsterm $g(x)$ wird dann gleich Null, wenn einer der beiden Faktoren gleich Null ist,
d.h. es muss gelten: $x - 3 = 0$ oder $4 - x = 0$
Löst man nach x auf, so ergibt sich: $x = 3$ oder $x = 4$
b) $g(2) = (2-3)(4-2) = -1 \cdot 2 = -2$
$-2 < 3$ => Damit liegt der Punkt P oberhalb von G_g!
c) $g(-1) = (-1-3)\big(4-(-1)\big) = -4 \cdot (4+1) = -4 \cdot 5 = -20$
Wenn für die y –Koordinate von Q gilt: $y < -20$, dann liegt der Punkt Q unterhalb von G_g.

M8 Lineare Funktionen | 4

Eine Funktion $f: x \mapsto mx + t$ mit $m, t \in \mathbb{Q}$ nennt man **lineare Funktion**.

Die Zahl m gibt die **Steigung** des Graphen von f an. Ist $m > 0$, so ist die zugehörige Gerade steigend, ist $m < 0$, so fällt die Gerade.

Die Zahl t nennt man **y –Achsenabschnitt**, sie bedeutet, dass der Graph von f die y –Achse im Punkt $(0/t)$ schneidet.

Bestimmung der Steigung m:
Kennt man zwei Punkte $P_1(x_1/y_1)$ und $P_2(x_2/y_2)$, die auf dem Graphen eines linearen Funktion liegen, so kann man die Steigung der Gerade wie folgt berechnen: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

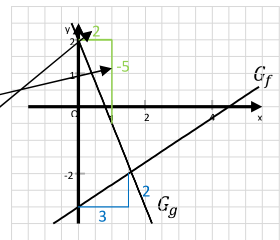
Spezielle Geraden:

1) Der Graph einer linearen Funktion mit der Steigung $m = 0$ ist eine Parallele zur x –Achse.
2) Der Graph einer linearen Funktion mit dem y –Achsenabschnitt $t = 0$ ist eine **Ursprungsgerade**.

M8 Lineare Funktionen | 4

1. **Aufgabe:**
Zeichne die Graphen der Funktionen $f(x) = \frac{2}{3}x - 3$ und $g(x) = -2\frac{1}{2}x + 2$ mithilfe eines geeigneten **Steigungsdreiecks** in ein Koordinatensystem!

2. **Aufgabe:**
Eine Gerade verläuft durch die Punkte $P(2/3)$ und $Q(-1/-2)$. Stelle die zugehörige Geradengleichung auf!



__Lösung:__

1. **Aufgabe:**
Hinweis: Zunächst formt man wie folgt um $-2\frac{1}{2} = -\frac{5}{2} = \frac{-5}{2}$

2. **Aufgabe:**
Für die Steigung gilt: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-3}{-1-2} = \frac{-5}{-3} = 1\frac{2}{3}$
Damit ergibt sich als Ansatz: $y = 1\frac{2}{3}x + t$
Um t zu bestimmen, setzt man einen der beiden gegebenen Punkte ein:
P einsetzen => $3 = 1\frac{2}{3} \cdot 2 + t$ => $3 = 3\frac{1}{3} + t$ => $t = -\frac{1}{3}$
Dies liefert als Ergebnis die Geradengleichung $y = 1\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

M8 Lineare Funktionen und Gleichungen — 5

Schneiden sich zwei Geraden $g: y = m_1x + t_1$ und $h: y = m_2x + t_2$, so kann man den **Schnittpunkt** rechnerisch und graphisch bestimmen:

1. **Rechnerische Bestimmung:**
   - Man setzt die beiden Funktionsterme gleich: $m_1x + t_1 = m_2x + t_2$
   - Diese lineare Gleichung wird nach x aufgelöst.
   - Den Wert von x setzt man nun entweder in g oder in h ein und bestimmt den zugehörigen y –Wert.

   Speziell: Die **Nullstelle** von g ist die Lösung der Gleichung $m_1x + t_1 = 0$

2. **Graphische Bestimmung:**
   - Man zeichnet die beiden Geraden in ein gemeinsames Koordinatensystem ein.
   - Nun kann der Schnittpunkt direkt abgelesen werden.

M8 Lineare Funktionen und Gleichungen — 5

Aufgabe:

Gegeben sind die linearen Funktionen $f: y = -2x + 4$, $g: y = \frac{2}{3}x - 1$ und $h: y = 2x - 5$.

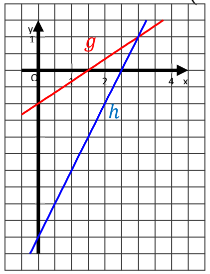
a) Bestimme die Nullstelle von f!
b) Bestimme den Schnittpunkt der Geraden f und g rechnerisch!
c) Bestimme den Schnittpunkt der Geraden g und h graphisch!

Lösung:

a) $-2x + 4 = 0$ => $-2x = -4$ => $x = 2$

b) $-2x + 4 = \frac{2}{3}x - 1$ => $-2x = \frac{2}{3}x - 5$ => $-2\frac{2}{3}x = -5$ => $x = 1\frac{7}{8}$

Einsetzen in f => $f\left(1\frac{7}{8}\right) = -2 \cdot 1\frac{7}{8} + 4 = \frac{1}{4}$ => Schnittpunkt $S(1\frac{7}{8}/\frac{1}{4})$

c) 

Ablesen des Schnittpunkts: $S(3/1)$

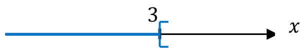
M8 Lineare Ungleichungen — 6

Auch **lineare Ungleichungen** lassen sich sowohl rechnerisch als auch graphisch lösen:

1. **Rechnerische Lösung:**
   Man verwendet dieselben Äquivalenzumformungen wie beim Lösen linearer Gleichungen.
   Achtung: Bei der Multiplikation oder Division auf beiden Seiten der Ungleichung mit/durch eine negative Zahl muss man das Ungleichungszeichen umdrehen!
   Beispiel: $-5x < -20$ $|:(-5)$ => $x > 4$

2. **Graphische Lösung:**
   Man fasst die beiden Seiten der linearen Ungleichung als Funktionsterme auf und zeichnet die zugehörigen Graphen in ein gemeinsames Koordinatensystem. Dann liest man den Schnittpunkt ab und entscheidet, ob die Ungleichung links oder rechts der Schnittstelle erfüllt ist. Diese **Lösungsmenge** gibt man entweder in der **Intervall-** oder in der **Mengenschreibweise** an.

Beispiele:

Mengenschreibweise	Intervallschreibweise	Am Zahlenstrahl
$L = \{x \mid x < 3\}$	$L =]-\infty; 3[$	
$L = \{x \mid x \geq -2\}$	$L = [-2; \infty[$	

M8 Lineare Ungleichungen — 6

Aufgaben:

1. Bestimme rechnerisch die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung: $-75 - 5x \geq 120$
2. Bestimme graphisch die Lösungsmenge der Ungleichung: $-2x - 5 < -\frac{1}{2}x - 2$
3. Gib die auf der Zahlengeraden dargestellten Lösungsmengen in Intervall- und Mengenschreibweise an!

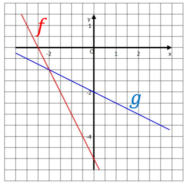
   a) 

   b) 

Lösung:

1. $-75 - 5x \geq 120$ $|+75$
   $-5x \geq 195$ $|:(-5)$ Achtung: Ungleichungszeichen umdrehen!
   $x \leq -39$ => $L =]-\infty; -39]$

2. Wir fassen die beiden Seiten der Ungleichung als Terme linearer Funktionen auf, d.h. $f(x) = -2x - 5$ und $g(x) = -\frac{1}{2}x - 2$.
   Damit lautet die Ungleichung: $f(x) < g(x)$ und man muss ermitteln, wo die Gerade f unterhalb der Geraden g verläuft. Dies ist für alle x –Werte erfüllt, die rechts des Schnittpunktes $S(-2/-1)$ liegen.
   Damit gilt: $L =]-2; \infty[$

3. a) $L =]-2; \infty[= \{x \mid x \geq -2\}$ b) $L =]-\infty; 5] = \{x \mid x \geq 5\}$

M8 Direkte und indirekte Proportionalität | 7

Gehört bei einer Zuordnung zweier Größen zum Doppelten, zum Halben, … , zum n-fachen der einen Größe, das Doppelte, die Hälfte, … , das n-fache der anderen Größe, d.h. ändern sich die beiden Größen im gleichen Verhältnis, so heißt die Zuordnung **direkt proportional**.

Dann gilt:

- Alle Wertepaare sind **quotientengleich** mit dem gemeinsamen Quotienten m.
- Die Zuordnungsvorschrift kann in der Form $y = mx$ geschrieben werden, der zugehörige Graph ist eine **Ursprungsgerade**. Der **Proportionalitätsfaktor** $m = \frac{y}{x}$ ist die **Steigung** der Geraden.

Gehört bei einer Zuordnung zweier Größen zum Doppelten, zum Halben, … , zum n-fachen der einen Größe, die Hälfte, das Doppelte, … , der n. Teil der anderen Größe, so heißt die Zuordnung **indirekt proportional**.

Dann gilt:

- Alle Wertepaare sind **produktgleich** mit dem gemeinsamen Produkt a.
- Die Zuordnungsvorschrift kann in der Form $y = \frac{a}{x}$ mit $a \neq 0$ geschrieben werden, der zugehörige Graph ist eine besondere gebrochen-rationale Funktion, nämlich eine **Hyperbel.**

M8 Direkte und indirekte Proportionalität | 7

Aufgaben:

1. Die Tabelle gehört zu einer direkt proportionalen Zuordnung. Bestimme den Proportionalitätsfaktor und gib seine Bedeutung an! Berechne die fehlenden Größen!

Masse m in kg	0,5	1,2	
Preis P in €	1,50		12,90

2. Die Tabelle gehört zu einer indirekt proportionalen Zuordnung. Gib die Zuordnungsvorschrift an und ergänze die fehlenden Werte!

x	12,5	2,5	
y	4		10

Lösung:

1. Direkt proportionale Größen sind quotientengleich => der Proportionalitätsfaktor beträgt: $\frac{1{,}50€}{0{,}5kg} = 3\,\frac{€}{kg}$
   Der Preis für eine bestimmte Menge einer Größe beträgt demnach 3€ pro kg.

   Fehlende Werte: $\frac{P}{m} = 3\,\frac{€}{kg}$ => $P = 3\,\frac{€}{kg} \cdot m = 3\,\frac{€}{kg} \cdot 1{,}2kg = 3{,}6€$
   $m = \frac{P}{3\frac{€}{kg}} = \frac{12{,}90€}{3\frac{€}{kg}} = 4{,}3kg$
2. Indirekt proportionale Größen sind produktgleich => $12{,}5 \cdot 4 = 50$ => Zuordnungsvorschrift: $y = \frac{50}{x}$
   Fehlende Werte: $y = \frac{50}{x}$ => $y = \frac{50}{2{,}5} = 20$
   $y \cdot x = 50$ => $x = \frac{50}{y} = \frac{50}{10} = 5$

M8 Gebrochen-rationale Funktionen | 8

Terme mit einer Variablen im Nenner nennt man **Bruchterme**.

Enthält ein Funktionsterm einen Bruchterm, so liegt eine **gebrochen-rationale Funktion** vor.

Werte, für die der Nenner null wird, gehören nicht zur Definitionsmenge, sie sind **Definitionslücken**.

Eine Gerade, der sich der Graph einer Funktion beliebig nahe annähert, nennt man **Asymptote des Funktionsgraphen.** Die Graphen gebrochen-rationaler Funktionen können **waagrechte** und **senkrechte Asymptoten** besitzen.

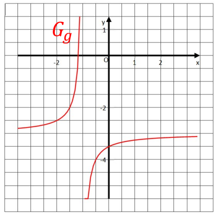
Die Graphen der gebrochen-rationalen Funktion $f: x \longmapsto \frac{a}{x}$ mit $a \in \mathbb{Q}, a \neq 0$ nennt man **Hyperbeln**.

Der Graph der Funktion $f: x \longmapsto \frac{a}{x+b} + c$ mit $a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{Q}$ besitzt jeweils einen Schnittpunkt mit der $x-$ und mit der $y-$ Achse, wenn die jeweilige Achse nicht die Asymptote des Graphen von f ist.
Den x –Wert des Schnittpunkts N mit der x –Achse erhält man durch Lösen der Gleichung $f(x) = 0$.
Der y –Wert des Schnittspunkts T mit der y –Achse beträgt $f(0)$.

M8 Gebrochen-rationale Funktionen | 8

Aufgaben:

1. Bestimme die Definitionslücke der Funktion und gib die maximale Definitionsmenge an! $f: x \longmapsto \frac{-3}{2x-6} + 3$
2. Gegeben ist der Graph der Funktion $g: x \longmapsto \frac{-0{,}5}{x+b} + c$.
   a) Lies am Graphen die Definitionslücke ab und gib die Gleichung der senkrechte Asymptote an. Bestimme damit die Zahl b!
   b) Lies am Graphen die Gleichung der waagrechten Asymptote ab und bestimme , damit die Zahl c!



3. Bestimme die Schnittpunkte des Graphen der Funktion $f(x) = \frac{2}{x-3} + 2$ mit den Koordinatenachsen!

Lösung:

1. Betrachtung des Nenners: $2x - 6 = 0$ => $2x = 6$ => $x = 3$
   Damit ist $x = 3$ die Definitionslücke und es gilt: $D_{max} = \mathbb{Q} \setminus \{3\}$.
2. a) Die Definitionslücke liegt bei $x = -1$, dies ist auch die Gleichung der senkrechten Asymptote. Damit gilt auch $b = -1$.
   b) Die waagrechte Asymptote hat die Gleichung $y = -3$, damit gilt auch $c = -3$
3. Schnittpunkt mit der $x-$ Achse: $\frac{2}{x-3} + 2 = 0$ => $\frac{2}{x-3} = -2$ => $2 = -2 \cdot (x-3)$ => $2 = -2x + 6$
   => $2x = -8$ => $x = -4$ $\quad N(-4/0)$
   Schnittpunkt mit der $y-$ Achsen: $f(0) = \frac{2}{0-3} + 2 = -\frac{2}{3} + 2 = 1\frac{1}{3}$ $\quad T(0/1\frac{1}{3})$

M8 Gebrochen-rationale Funktionen | 9

Spiegeln und **Strecken** des Graphen der Funktion $f\colon x \longmapsto \frac{1}{x}$:

Betrachtet wird dazu die Funktion $g\colon x \longmapsto \frac{a}{x}$ mit $a \in \mathbb{Q}, a \neq 0$

1. $a > 0$: Der Funktionsgraph G_f wird um den Faktor a gestreckt.
2. $a < 0$: Der Funktionsgraph G_f wird an der x −Achse gespiegelt und um den Faktor $|a|$ gestreckt.

Verschiebung des Funktionsgraphen der Funktion $f\colon x \longmapsto \frac{a}{x}$

1. in $\boldsymbol{x}$ − **Richtung:** $g(x) = \frac{a}{x+b}$ mit $b \in \mathbb{Q}, b \neq 0$
   Verschiebung um b in negative x −Richtung (d.h. nach links) (für $b > 0$)
   Verschiebung um $|b|$ in positive x −Richtung (d.h. nach rechts) (für $b < 0$)

2. in $\boldsymbol{y}$ − **Richtung:** $g(x) = \frac{a}{x} + c$ mit $c \in \mathbb{Q}, c \neq 0$
   Verschiebung um c in positive y −Richtung (d.h. nach oben) (für $c > 0$)
   Verschiebung um $|c|$ in negative y −Richtung (d.h. nach unten) (für $c < 0$)

M8 Gebrochen-rationale Funktionen | 9

Aufgaben:

Beschreibe, wie der Graph der Funktion $g\colon x \longmapsto \frac{-2}{x+3} - 4$ schrittweise aus dem Graphen der Funktion $f\colon x \longmapsto \frac{1}{x}$ hervorgeht und gibt damit auch die Asymptoten der der Funktion g an!

Lösung:

Vorbemerkung: Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ hat die beiden Asymptoten $x = 0$ und $y = 0$

1. Schritt: G_f wird an der x- Achse gespiegelt und um den Faktor 2 in y −Richtung gestreckt.
   (dadurch ändern sich die Asymptoten nicht).
2. Schritt: Der nun entstandene Graph wird um 3 Einheiten nach links, d.h. in negative x −Richtung verschoben.
   Dadurch wird die senkrechte Asymptote zu $y = -3$
3. Schritt: Zum Schluss wird der Graph noch um 4 Einheiten nach unten, d.h. in negative y −Richtung verschoben.
   Damit erhält man eine waagrechte Asymptote bei $x = -4$

M8 Bruchterme und Bruchgleichungen | 10

Kürzen und Erweitern von Bruchtermen:

Beim **Kürzen** eines Bruchterms dividiert man Zähler und Nenner durch denselben Term. Beim **Erweitern** eines Bruchterms multipliziert man Zähler und Nenner mit dem demselben Term.
Achtung: Mit Null darf man weder kürzen noch erweitern!

Beim Rechnen mit Bruchtermen gelten dieselben Gesetze wie beim Rechnen mit Brüchen:

1. **Addieren bzw. Subtrahieren von Bruchtermen:**
   Haben die Bruchterme den gleichen Nenner, so werden die Zähler addiert bzw. subtrahiert.
   Haben die Bruchterme unterschiedliche Nenner, so muss man sie zunächst durch Kürzen oder Erweitern auf den gleichen Nenner bringen.

2. **Multiplizieren bzw. Dividieren von Bruchtermen:**
   Bruchterme werden miteinander **multipliziert**, in dem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.
   Durch einen Bruchterm wird **dividiert**, indem man mit seinem Kehrbruchterm multipliziert.

M8 Bruchterme und Bruchgleichungen | 10

Aufgaben:

1. Kürze den Bruchterm $\frac{3x}{12x-6x^2}$ so weit wie möglich!
2. Erweitere den Bruchterm $\frac{2x-3}{x+2}$ auf den Nenner $3x^2 + 6x$ und gib den Erweiterungsfaktor an!
3. Fasse den Term zusammen und vereinfache so weit wie möglich! $\frac{x}{2x-8} - \frac{1-x}{x^2-4x}$
4. Vereinfache so weit wie möglich! $\frac{x}{x-3} : \frac{5x^2+x}{3-x}$

Lösung:

1. $\frac{3x}{12x-6\ ^2} = \frac{3x}{6x\cdot(2-x)} = \frac{1}{2(2-x)} = \frac{1}{4-2x}$
2. $3x^2 + 6x = 3x(x+2)$ Dies liefert den Erweiterungsfaktor $3x$ => $\frac{2x-3}{x+2} \cdot \frac{3x}{3x} = \frac{(2x-3)\cdot 3x}{(x+2)\cdot 3x} = \frac{6x^2-9x}{3x^2+2x}$
3. Zunächst betrachtet man die beiden Nenner: $2x - 8 = 2(x-4)$ und $x^2 - 4x = x(x-4)$
   Damit ergibt sich als Hauptnenner: $2x(x-4)$ und der erste Term muss mit dem Faktor x, der zweite Term mit dem Faktor 2 erweitert werden:
   $\frac{x}{2x-8} - \frac{1-x}{x^2-4x} = \frac{x}{2x-8} \cdot \frac{x}{x} - \frac{1-x}{x^2-4x} \cdot \frac{2}{2} = \frac{x^2}{(2x-8)\cdot x} - \frac{(1-x)\cdot 2}{(x^2-4x)\cdot 2} = \frac{x^2}{2x^2-8x} - \frac{2-2x}{2x^2-8x} = \frac{x^2-(2-2x)}{2x^2-8x} = \frac{x^2-2+2x}{2x^2-8x} = \frac{x^2+2x-2}{2x^2-8x}$
4. $\frac{x}{x-3} : \frac{5x^2+x}{3-x} = \frac{x}{x-3} \cdot \frac{3-x}{5x^2+x} = \frac{x}{x-3} \cdot \frac{(-1)\cdot(x-3)}{x\cdot(5x+1)} = \frac{x\cdot(-1)\cdot(x-3)}{(x-3)\cdot x\cdot(5x+1)} = \frac{-1}{5x+1} = -\frac{1}{5x+1}$

M8 Potenzgesetze — 11

Für $a, b \neq 0$ und ganzzahlige Exponenten p und q gilt:

1. **Potenzen mit gleicher Basis:** $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ und $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$
2. **Potenzen mit gleichem Exponenten:** $a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p$ und $\frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p$
3. **Potenzen von Potenzen:** $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$

Spezielle Potenzen: $a^0 = 1$ und $a^1 = a$

Merkregeln: $a^{-1} = \frac{1}{a}$ $\quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$

$a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ $\quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-2} = \left(\frac{b}{a}\right)^2$ und so weiter

M8 Potenzgesetze — 11

Aufgaben:

1. Vereinfache soweit wie möglich! $\left(\frac{4}{5}\right)^{-8} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 : \left(\frac{4}{5}\right)^{-7}$
2. Fasse soweit wie möglich zusammen! $\left(\frac{2}{3}\right)^4 : \left(\frac{2}{5}\right)^4$
3. Vereinfache! $\left(\left(-\frac{3}{x^2}\right)^{-2}\right)^3$

Lösung:

1. $\left(\frac{4}{5}\right)^{-8} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 : \left(\frac{4}{5}\right)^{-7} = \left(\frac{4}{5}\right)^{-8+3} : \left(\frac{4}{5}\right)^{-7} = \left(\frac{4}{5}\right)^{-8+3-(-7)} = \left(\frac{4}{5}\right)^{-8+3+7} = \left(\frac{4}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} = 1\frac{9}{16}$
2. $\left(\frac{2}{3}\right)^4 : \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \left(\frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{5}}\right)^4 = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2}\right)^4 = \left(\frac{5}{3}\right)^4 = \frac{625}{81} = 7\frac{58}{81}$
3. $\left(\left(-\frac{3}{x^2}\right)^{-2}\right)^3 = \left(-\frac{3}{x^2}\right)^{-2 \cdot 3} = \left(-\frac{3}{x^2}\right)^{-6} = \left(\frac{x^2}{-3}\right)^6 = \frac{x^{2 \cdot 6}}{(-3)^6} = \frac{x^{12}}{729}$

M8 Lösen von Bruchgleichungen — 12

<u>Vorgehen beim Lösen von Bruchgleichungen:</u>

1. Definitionsmenge der Ausgangsgleichung bestimmen.
2. Multiplikation beider Seiten mit dem Hautnenner der vorkommenden Nenner.
3. Lösen der nennerfreien Gleichung mithilfe von Äquivalenzumformungen.
4. Prüfen, ob die Lösung in der Definitionsmenge der Ausgangsgleichung enthalten ist.

Anwendung: Auflösen von Formeln

Naturwissenschaftliche Formeln lassen sich oft als Bruchgleichungen auffassen. Jede Variable kann zur Lösungsvariablen werden. Es ist sinnvoll, zuerst nach der Lösungsvariablen aufzulösen und dann die gegebenen Werte für die anderen Variablen einzusetzen.

M8 Lösen von Bruchgleichungen — 12

Aufgaben:

1. Löse folgende Bruchgleichung! $\frac{1+3x}{3x^2} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x-1}$
2. Löse nach der in Klammern angegebenen Einheit auf! $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$ $\quad (g)$ **Linsengleichung**

Lösung:

1. $\frac{1+3x}{3x^2} = \frac{2}{x} + \frac{1}{1-x}$ $\quad D = \mathbb{Q} \setminus \{0; 1\}$

   Zunächst bestimmt man den Hauptnenner, dieser lautet $3x^2(1-x)$, damit wird die ganze Gleichung multipliziert:

   $\frac{1+3x}{3x^2} \cdot 3x^2(1-x) = \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{1-x}\right) \cdot 3x^2(1-x)$

   $(1+3x)(1-x) = \frac{2}{x} \cdot 3x^2(1-x) + \frac{1}{1-x} \cdot 3x^2(1-x)$

   $1 - x + 3x - 3x^2 = 2 \cdot 3x \cdot (1-x) + 3x^2$

   $2x + 1 - 3x^2 = 6x - 6x^2 + 3x^2$

   $2x + 1 - 3x^2 = -3x^2 + 6x \quad |+3x^2 - 6x - 1$

   $-4x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{4}$ $\quad$ Vergleich mit D liefert: $L = \left\{\frac{1}{4}\right\}$

2. $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$ $\quad$ Multiplikation beider Seiten mit dem Hauptnenner: $f \cdot g \cdot b$

   $\frac{1}{f} \cdot fgb = \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{b}\right) \cdot fgb \quad \Rightarrow bg = \frac{1}{g} \cdot fgb + \frac{1}{b} \cdot fgb \quad \Rightarrow bg = fb + fg \quad |-fg$

   $bg - fg = fb \quad \Rightarrow \quad g(b-f) = fb \quad |:(b-f)$

   $g = \frac{fb}{b-f}$

M8 Laplace-Experimente | 13

Ein Experiment ist ein **Zufallsexperiment**, wenn gilt:

1. Es wird genau eines von mehreren möglichen Ergebnissen eintreten.
2. Welches Ergebnis eintreten wird, lässt sich nicht vorhersagen.

Die Menge aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments heißt **Ergebnismenge**. Sie wird mit Ω bezeichnet.
Die einzelnen Ergebnisse bezeichnet man mit $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$
Die Anzahl aller Elemente der Ergebnismenge Ω bezeichnet man mit: |Ω|

A ist eine **Teilmenge** von Ω, wenn jedes Element von A in Ω enthalten ist. Man schreibt: $A \subset \Omega$

Jede Teilmenge A der Ergebnismenge Ω nennt man **Ereignis**.

Jedes Ereignis A hat ein **Gegenereignis** $\bar{A}$. Es besteht aus den Ergebnissen von Ω, die nicht in A enthalten sind.
Man schreibt: $\bar{A} = \Omega \setminus A$

Die relative Häufigkeit eines Ereignisses stabilisiert sich mit zunehmender Versuchsanzahl um einen festen Wert (**empirisches Gesetz der großen Zahlen**).

Bei einem Zufallsexperiment wird jedem Ereignis A eine **Wahrscheinlichkeit** $P(A)$ zwischen 0 und 1 zugeordnet.

M8 Laplace-Experimente | 13

Aufgaben:

1. Erläutere jeweils, ob ein Zufallsexperiment vorliegt und gib gegebenenfalls eine mögliche Ergebnismenge Ω und |Ω| an!
   a) Werfen zweier Würfel und Bilden der Augensumme.
   b) Messen der Körpergröße von Tom auf Zentimeter genau.

2. Anna muss auf ihrem Schulweg 3 Kreuzungen mit Ampeln überqueren. Gib zu den verschiedenen Ereignissen jeweils das Gegenereignis in Worten an!
   a) Alle Ampeln stehen auf grün.
   b) Die ersten beiden Ampeln sind rot.
   c) Mindestens eine Ampel ist grün.

Lösung:

1. a) Dies ist ein Zufallsexperiment, da genau eines von mehreren möglichen Ergebnissen eintreten wird und nicht vorhersagbar ist, welches dies ist. $\Omega = \{2; 3; 4; \ldots; 12\}$ und $|\Omega| = 11$
   b) Dies ist kein Zufallsexperiment, da vorhersagbar ist, wie groß Tom ist (wenn er sich z.B. am Tag zuvor bereits gemessen hat).

2. a) Mindestens eine Ampel steht auf rot.
   b) Von den ersten beiden Ampeln ist mindestens eine grün.
   c) Keine Ampel ist grün.

M8 Laplace-Experimente | 14

Zufallsexperimente, bei denen alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind, nennt man **Laplace-Experimente**.

Laplace-Wahrscheinlichkeit:
Für die Laplace-Wahrscheinlichkeit $P(A)$ eines Ereignisses A bei einem Laplace-Experiment gilt:

$$P(A) = \frac{Anzah\ \ der\ für\ das\ Ereignis\ A\ günstigen\ Ergebnisse}{Anzahl\ der\ möglich\ \ \ Ergebnisse} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Zählprinzip:
Zieht man aus k verschiedenen Mengen mit jeweils $m_1, m_2, \ldots, m_k$ Elementen jeweils ein Element, so gibt es dafür insgesamt $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k$ verschiedene Möglichkeiten.

M8 Laplace-Experimente | 14

Aufgaben:

1. Aus dem Wort *GRUNDWISSEN* wird ein Buchstabe beliebig ausgewählt. Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
   a) ein *S* ausgewählt wird!
   b) ein Konsonant ausgewählt wird!
   c) ein *R* oder ein *N* ausgewählt werden! Gib zudem Ω und |Ω| an!

2. Lena hat an ihrem Fahrrad ein Schloss mit einer vierstelligen Zahl. An jeder Stelle kann sie eine der Ziffern 0 bis 9 einstellen.
   a) Ermittle, wie viele unterschiedliche Zahlenkombinationen es gibt! Gib zudem Ω an!
   b) Lena hat ihre Kombination vergessen, weiß allerdings noch, dass die vierstellige Zahl kleiner als 5000 und gerade war. Bestimme, wie viele unterschiedliche Kombinationen sie ausprobieren müsste!

Lösung:

1. $\Omega = \{G; R; U; N; D; W; I; S; S; E; N\}$ $|\Omega| = 11$
   a) $P(S) = \frac{2}{11}$ b) $P(Konsonant) = \frac{8}{11}$ c) $P(R\ oder\ N) = \frac{3}{11}$

2. a) $\Omega = \{0000; 0001; 0002; \ldots; 9999\}$ und $|\Omega| = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 6561$
   Es gibt also 6561 unterschiedliche Zahlenkombinationen.
   b) Anzahl der möglichen Kombinationen mit dem Zählprinzip: $5 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 5 = 2025$

Zahl kleiner als 5000 => 1. Ziffer 0,1,2,3 oder 4, damit 5 Möglichkeiten	2. und 3. Ziffer beliebig => je 9 Möglichkeiten	Zahl gerade => 4. Ziffer 0,2,4,6,8 und damit 5 Möglichkeiten

M8 Lineare Gleichungssysteme | 15

Zwei lineare Gleichungen mit zwei gemeinsamen Variablen bilden ein **lineares Gleichungssystem**.
Beispiel: $(I)\ 3x + 2y = 4$
$(II)\ 2x = 5 - y$

Ein Zahlenpaar heißt **Lösung** dieses Gleichungssystems, wenn das Paar beide Gleichungen des Systems erfüllt.

Graphische Lösung eines linearen Gleichungssystems
Zur graphischen Lösung geht man wie folgt vor:

1. Man löst beide linearen Gleichungen nach derselben Variable (meist y) auf.
2. Man zeichnet die beiden zu den aufgelösten Gleichungen gehörenden Geraden in ein Koordinatensystem ein.
3. Die gemeinsamen Punkte der beiden Geraden erfüllen beide Gleichungen und sind somit Lösung des Gleichungssystems.

Dabei ergeben sich drei mögliche Fälle für die Lösung eines linearen Gleichungssystems:

1. Das Gleichungssystem hat genau eine Lösung, wenn sich die Geraden in einem Punkt schneiden.
2. Das Gleichungssystem hat keine Lösung, wenn die beiden Geraden echt parallel verlaufen.
3. Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen, wenn die beiden Geraden identisch sind.

M8 Lineare Gleichungssysteme | 15

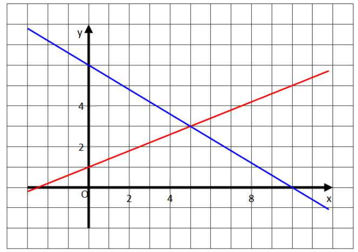
Aufgabe:
Löse das folgende lineare Gleichungssystem graphisch und gib die Lösungsmenge an!
$(I)\ 2x - 5y = -10$
$(II)\ 3x + 5y = 30$

Lösung:
Zunächst löst man beide Gleichungen nach y auf: $(I)\ \ y = \frac{2}{5}x + 2$ und $(II)\ \ y = -\frac{3}{5}x + 6$

Dann trägt man die zugehörigen Geraden in ein Koordinatensystem ein.

Die Geraden schneiden sich im Punkt $P(5/3)$.

Damit gilt für die Lösungsmenge: $L = \{(5/3)\}$



M8 Lineare Gleichungssysteme | 16

Zur Lösung eines linearen Gleichungssystems verwenden wir das **Einsetzungs-** und das **Additionsverfahren**.

Einsetzungsverfahren:

1. Man löst eine Gleichung nach einer Variablen auf.
2. Man setzt den ermittelten Term für diese Variable in die andere Gleichung ein. Dann löst man den entstandenen Term nach der zweiten Variablen auf und erhält einen Wert.
3. Diesen Wert setzt man nun in die unter 1. aufgelöste Gleichung ein und erhält einen Wert für die 2. Variable.

Beispiel: $(I)\ 5x + 2y = 4 \quad (II)\ 4 + y = 0{,}5x$
(II) nach y auflösen: $y = 0{,}5x - 4$
y in (I) einsetzen:
$5x + 2 \cdot (0{,}5x - 4) = 4$
$5x + x - 8 = 4$ => $6x - 8 = 4$
$6x = 12$ => $x = 2$
$x = 2$ in $y = 0{,}5x - 4$ einsetzen:
$y = 0{,}5 \cdot 2 - 4 = 1 - 4 = -3$

Additionsverfahren:

1. Man multipliziert eine oder beide Gleichungen mit einer geeigneten Zahl
2. Die beiden Gleichungen werden nun addiert/subtrahiert, so dass eine Variable wegfällt. Auflösen liefert einen Wert.
3. Diesen Wert setzt man nun in eine der beiden Gleichungen ein und erhält den Wert der anderen Variablen.

Beispiel: $(I)\ 5x + 2y = 4 \quad (II)\ 4 + y = 0{,}5x$
$(II)\ 4 + y = 0{,}5x \quad |\cdot 2$
$2 \cdot (II)\ 8 + 2y = x$
$(I) - 2 \cdot (II)$: $5x - 8 = 4 - x$
$6x = 12$ => $x = 2$
$x = 2$ einsetzen in (I):
$5 \cdot 2 + 2y = 4$ => $10 + 2y = 4$
$2y = -6$ => $y = -3$

M8 Lineare Gleichungssysteme | 16

Aufgaben:

1. Löse das folgende Gleichungssystem mit dem Einsetzungsverfahren: $(I)\ 4c - 3d = 0{,}5$
   $(II) - 2c + 4d = 9$
2. Löse das folgende Gleichungssystem mit dem Additionsverfahren: $(I)\ 6a - 5b = 3$
   $(II)\ 12a + 16b = -20$

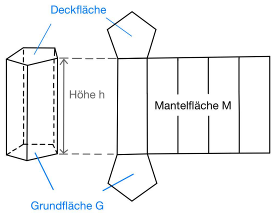
Lösung:

1. (II) nach c auflösen: $-2c = 9 - 4d$ => $c = (9 - 4d) : (-2) = -4{,}5 + 2d$
   c in (I) einsetzen: $4 \cdot (-4{,}5 + 2d) - 3d = 0{,}5$ => $-18 + 8d - 3d = 0{,}5$ => $-18 + 5d = 0{,}5$
   nach d auflösen: $5d = 18{,}5$ => $d = \frac{18{,}5}{5} = 3{,}7$
   $d = 3{,}7$ einsetzen in $c = -4{,}5 + 2d$ => $c = -4{,}5 + 2 \cdot 3{,}7 = -4{,}5 + 7{,}4 = 2{,}9$
2. (I) mit 2 multiplizieren: $2 \cdot (I)$: $12a - 10b = 6$
   Variable a eliminieren: $2 \cdot (I) - (II)$: $-10b - 16b = 6 - (-20)$ => $-26b = 26$
   Nach b auflösen: $b = -1$
   $b = -1$ in (I) einsetzen: $6a - 5 \cdot (-1) = 3$ => $6a + 5 = 3$ => $6a = -2$
   Nach a auflösen: $a = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$

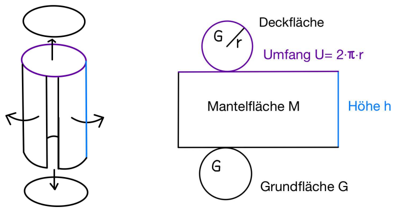
M8 Kreis, Prisma und Zylinder 17

Kreis:
Für den **Umfang U** eines Kreises gilt: $U = 2\pi \cdot r$
Den **Flächeninhalt A** eines Kreises berechnet man mit: $A = \pi \cdot r^2$

Prisma:
Die **Oberfläche** eines Prismas setzt sich aus der Grund- und der Mantelfläche zusammen: $O = 2G + M$
Für das **Volumen** eines Prismas der Höhe h gilt: $V = G \cdot h$



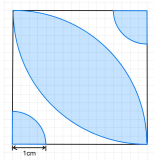
Zylinder:
Für die **Mantelfläche** eines Zylinders gilt: $M = 2\pi r \cdot h$
Die **Oberfläche** eines Zylinders setzt sich aus der rechteckigen Mantelfläche und zwei Kreisen als Grund- und Deckfläche zusammen: $O = 2G + M = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h$
Für das **Volumen** gilt: $V = G \cdot h = \pi r^2 \cdot h$



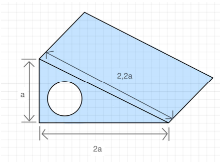
M8 Kreis, Prisma und Zylinder 17

Aufgaben:

1. Berechne den Umfang und den Flächeninhalt der gefärbten Fläche!



2. Der abgebildete durchbohrte Körper ist $2a$ lang. Das kreisrunde Bohrloch hat den Durchmesser $d = \frac{1}{2}a$. Bestimme das Volumen und die Oberfläche in Abhängigkeit von a.



Lösung:

1. $U = 2 \cdot U_{VK,groß} + 2 \cdot U_{VK,klein} + 4cm = U_{HK,groß} + U_{HK,klein} + 4cm = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot r_{groß} + \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot r_{klein} + 4cm$
$U = 2\pi \cdot 4cm + 2\pi \cdot 1cm + 4cm = 10\pi cm + 4cm \approx 35cm$
$A = 2 \cdot A_{VK,groß} - 2 \cdot A_{Dreieck,groß} + 2 \cdot A_{VK,klein} = A_{HK,groß} - A_{Quadrat} + A_{HK,klein} = \frac{1}{2} \cdot \pi r_{groß}^2 - r_{groß}^2 + \frac{1}{2} \cdot \pi r_{klein}^2$
$A = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (4cm)^2 - (4cm)^2 + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (1cm)^2 = 8{,}5 \cdot \pi cm^2 - 16cm^2 \approx 11cm^2$

2. $V = V_{Prisma} - V_{Zyl.} = A_{Dreieck} \cdot h_{Prisma} - \pi r^2 \cdot h_{Zyl.} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2a \cdot 2a - \pi \cdot \left(\frac{1}{4}a\right)^2 \cdot 2a = 2a^3 - \pi \cdot \frac{1}{16}a^2 \cdot 2a = 2a^3 - \frac{1}{8}\pi a^3$
$O = 2G - 2A_{Kreis} + M + M_{Zylinder} = 2 \cdot \frac{1}{2}a \cdot 2a - 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{4}a\right)^2 + (2{,}2a + 2a + a) \cdot 2a + 2\pi \cdot (\frac{1}{4}a) \cdot 2a$
$O = 2a^2 - 2\pi \cdot \frac{1}{16}a^2 + 5{,}2a \cdot 2a + \pi a^2 = 2a^2 - \frac{1}{8}\pi a^2 + 10{,}4a^2 + \pi a^2 = 12{,}4a^2 + \frac{7}{8}\pi a^2$

VK: Viertelkreis, HK: Halbkreis